www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

École Supérieure de Commerce de Paris

CONCOURS D'ADMISSION DE 1989

Mathématiques III

OPTION ÉCONOMIQUE

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

sont autorisées : règles graduées, tables de valeurs numériques sans formulaire, calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long sur 15 cm de large.

exercice 1 après l'exercice 2

EXERCICE 2

Soit $u = (u_n)$ la suite réelle définie par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{2}{u_n}$$

et la condition initiale $u_0 = 1$.

1. Montrer que la suite u est bien définie.

2. Étudier la monotonie de la suite u. Montrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty.$$

3. Pour tout nombre entier naturel k, exprimer $u_{k+1}^2 - u_k^2$ en fonction de u_k. En déduire la limite de $u_{k+1}^2 - u_k^2$ lorsque k tend vers $+\infty$.

4. Pour tout nombre entier naturel n, on pose :

$$v_n = \frac{u_n^2}{4}.$$

a) Montrer que, pour tout nombre entier naturel k :

$$v_{k+1} - v_k \geq 1.$$

En déduire que, pour tout nombre entier naturel non nul n :

$$v_n \geq n.$$

b) Montrer que, pour tout nombre entier $k \geq 1$:

$$v_{k+1} - v_k \leq 1 + \frac{1}{k}.$$

c) Prouver que, pour tout entier $k \geq 2$:

$$\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t}.$$

d) Déduire des questions *b*) et *c*) que, pour tout entier $n \geq 1$:

$$v_n - v_0 \leq n + \frac{1}{v_0} + 1 + \ln n.$$

5. Déterminer la limite du rapport v_n/n lorsque n tend vers $+\infty$. En déduire un équivalent de u_n.

EXERCICE 1

Soit f la fonction réelle définie sur R par la relation : $f(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2}\,dt$.

1. *a*) Étudier la parité de f.
b) Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.
c) Montrer que f admet 0 pour limite en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. *a*) Montrer que f est dérivable et que :

$$f'(x) = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2}.$$

b) Étudier la variation de f. Préciser les points où f présente un extremum.
c) Calculer la dérivée seconde de f et déterminer le signe de $f''(x)$.
d) Construire la courbe représentative de f. (On admettra que le maximum de f est sensiblement égal à 0,3.)

3. On considère une variable aléatoire réelle X qui suit une loi normale centrée d'écart-type σ. Pour tout nombre réel strictement positif a, on note $p(a)$ la probabilité de l'événement :

$$a \leq X \leq 2a.$$

Déterminer la valeur de a pour laquelle $p(a)$ est maximal.

EXERCICE 3

On désigne par n un nombre entier strictement supérieur à 1.
Un sac contient des boules rouges et des boules blanches, indiscernables si ce n'est par la couleur. La proportion de boules rouges est p, où $0 < p < 1$; celle des boules blanches est $q = 1 - p$. On effectue une suite de tirages d'une boule, avec remise de la boule tirée après chaque tirage, selon la règle suivante :
- dès qu'une boule rouge est tirée, on arrête les tirages ;
- si les n premières boules tirées sont blanches, on arrête les tirages.

1. Soit Ω l'ensemble des suites de couleurs de boules qu'on peut tirer selon cette règle. (Ces suites sont de longueur finie au plus égale à n.)
a) Montrer que Ω possède $n + 1$ éléments.
b) Déterminer la probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ associée à cette expérience aléatoire (où $\mathcal{P}(\Omega)$ désigne l'ensemble des parties de Ω).

2. On note N, X_1 et X_2 les variables aléatoires représentant respectivement le nombre de tirages effectués, le nombre de boules blanches tirées et le nombre de boules rouges tirées.
a) Établir une relation simple entre ces trois variables aléatoires.
b) Déterminer les lois de probabilité de ces trois variables et exprimer leurs espérances en fonction de n et q.

3. Trouver la loi de probabilité de la variable aléatoire $Z = X_1 X_2$ et calculer son espérance. En déduire l'expression de la covariance de X_1 et X_2 en fonction de n et q.

4. Pour tout couple (j, k) de nombres entiers naturels non nuls tels que $j + k \leq n$, calculer la probabilité conditionnelle :

$$P(N = j + k / N > k).$$

Quand vaut-elle $P(N = j)$?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail